中国科学: 数学 2013 年 第 41 卷 第 1 期: 1～?
www.springerlink.com math.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

有理Fourier级数在变差条件下的收敛性研究

谭立辉①, 钱涛②*

① 广东工业大学应用数学学院, 广州 510006;
② 澳门大学科技学院, 氹仔, 澳门
E-mail: lihuitan@ymail.com, fsttq@umac.mo

收稿日期: 2012-05-10; 接受日期: 2013-04-12 ;*通信作者
国家自然科学基金(批准号: 11101094)资助项目, 澳门大学研究基金(UL017/08-Y3/MAT/QT01/FST)资助项目, 澳门科学技术基金(FDCT/056/2010/A3)资助项目.

摘要 在本文中, 我们把Fourier级数的一些经典结论推广到有理Fourier级数的情况下. 首先, 我们给出了有理Fourier级数和共轭有理Fourier级数在有界变差条件下的收敛速度估计. 利用此结论, 得到了类似于Fourier级数的Dirichlet-Jordan定理和W.H.Young定理. 最后, 证明了这两个定理在调和有界变差条件下也成立.

关键词 有理Fourier级数 共轭有理Fourier级数 收敛速度 变差函数.

MSC (2000) 主题分类 30B10, 30B30.

1 引言

在实际问题中, 为了深入地分析和理解函数, 通常将函数在正交基下进行展开. 一般来说, 这样的正交基不唯一, 可以有很多种情况. 因此, 需要根据实际的情况选取合适的正交基用来分析函数的相关性质. 用$L^p[-\pi,\pi]$表示所有以2π为周期且满足p次方可积$\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dt\right)^{1/p}<\infty$的函数的全体, $1\leqslant p<\infty$. 当所研究的函数空间为$L^2[-\pi,\pi]$, 那么在下面的内积定义下

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx,$$

复三角函数系$\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$构成$L^2[-\pi,\pi]$中最经典的一组规范正交基. 这组基建立了信号在时域与频域上的联系[1, 2]. 最近, 为了将$L^2[-\pi,\pi]$中的函数自适应地分解为一些瞬时频率为正的周期解析信号之和, 人们发现了满足上述条件的一组规范有理正交序列$\{\phi_k(e^{ix})\}_{k=-\infty}^{\infty}$[3, 4, 5], 其中$\phi_0(e^{ix})=1$且对于任意$k\in\mathbb{N}$,

$$\phi_k(e^{ix})=\frac{\sqrt{1-|\alpha_k|^2}e^{ix}}{1-\overline{\alpha}_k e^{ix}}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{e^{ix}-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j e^{ix}},\qquad \phi_{-k}(e^{ix})=\overline{\phi_k(e^{ix})},\tag{1.1}$$

$\phi_k(e^{ix})$中点集α_k位于单位圆$\mathbb{D}:=\{z||z|<1\}$内. 如果单位圆内的序列$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ 进一步满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=\infty,\tag{1.2}$$

英文引用格式: Tan L H, Qian T. On convergence of rational Fourier series of functions of bounded variations (in Chinese). Sci Sin Math, 2013, 41(1): 00–00, doi: 10.1360/

那么这组有理正交序列$\{\phi_k(e^{ix})\}_{k=-\infty}^{\infty}$也构成了$L^2[-\pi,\pi]$的一组规范正交基[6]. 因此, 对任意的$f\in L^2[-\pi,\pi]$, 它可以在$L^2$-范数的意义下作如下展开:

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)\phi_k(e^{ix}), \tag{1.3}$$

其中$c_k(f)=\langle f,\phi_k\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{\phi_k(e^{it})}dt$. 显然, 当(1.1)式中所有的$\alpha_k=0$时, (1.3)就是经典的Fourier级数

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f(x),e^{ikx}\rangle e^{ikx}.$$

因此, 展开式(1.3)被称为有理Fourier级数, 它是Fourier级数的推广. 关于有理Fourier级数的研究, 可以追溯到十九世纪二十年代, 它已经被广泛地应用到控制论、系统鉴定、有理逼近等领域[6, 7, 8, 9, 10, 11].

在本文中, 为了使点集序列$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$满足完备性条件(1.2), 我们假设$\sup_{k\in\mathbb{N}}\{|\alpha_k|\}=r<1$. 在此条件下, 我们将研究有理Fourier级数(1.3)对应的部分和

$$S_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)\phi_k(e^{ix}) \tag{1.4}$$

及共轭有理Fourier级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-i)\mathrm{sgn}(k)c_k(f)\phi_k(e^{ix}) \tag{1.5}$$

对应的部分和

$$\tilde{S}_n(f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}-isgn(n)c_k(f)\phi_k(e^{ix}), \tag{1.6}$$

在有界变差和调和有界变差条件下的收敛性, 其中$c_k(f)=\langle f,\phi_k\rangle$和sgn 表示符号函数. 在第二节中, 我们给出有理Fourier级数和调和有理Fourier级数在有界变差条件下的收敛速度估计. 作为该结论的应用, 我们证明了类似于Fourier级数的Dirichlet-Jordan定理和W.H.Young定理. 在第三节中，我们进一步证明了这两个定理在调和有界变差函数上也是成立的.

2 有理Fourier级数在有界变差条件下的收敛性研究

在这一节, 我们将给出有理Fourier级数在有界变差函数条件下的收敛速性研究. 为此, 我们引入下面的Christoffel-Darboux公式[9].

引理2.1 假设$\xi=e^{it}$且$\bar{\xi}z\neq1$. 那么

$$\sum_{k=-n}^{n}\overline{\phi_k(\xi)}\phi_k(z)=\frac{B_n(\xi)B_n^{-1}(z)-\bar{\xi}z-\overline{\xi B_n(\xi)}zB_n(z)}{1-\bar{\xi}z},$$

其中$B_n(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}$为有限Blaschke积.

令$\alpha_k=|\alpha_k|e^{it_k}$,

$$\theta_n(x)=\int\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(x-t_k)+|\alpha_k|^2}dx \tag{2.1}$$

和

$$\theta_n(t,x) := \theta_n(x) - \theta_n(t) = \int_t^x \sum_{k=1}^n \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(y-t_k)+|\alpha_k|^2} dy. \tag{2.2}$$

根据引理2.1 , 部分和$S_n(f)(x)$和$\tilde{S}_n(f)(x)$ 可分别表示为

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(x-t,x)dt, \qquad \tilde{S}_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\tilde{D}_n(x-t,x)dt,$$

其中核$D_n(t,x)$和$\tilde{D}_n(t,x)$分别为

$$D_n(t,x) = \frac{\sin\left[\frac{x-t}{2}+\theta_n(t,x)\right]}{2\sin(\frac{x-t}{2})}, \quad \tilde{D}_n(t,x) = \frac{\cos(\frac{x-t}{2}) - \cos\left[\frac{x-t}{2}+\theta_n(t,x)\right]}{2\sin(\frac{x-t}{2})}. \tag{2.3}$$

显然, 当所有的$\alpha_k = 0$, 核$D_n(t,x)$和$\tilde{D}_n(t,x)$就是经典的Dirichlet核和共轭Dirichlet核

$$D_n(t,x) = \frac{\sin[\frac{(x-t)}{2}+n(x-t)]}{2\sin(\frac{x-t}{2})}, \qquad \tilde{D}_n(t,x) = \frac{\cos(\frac{x-t}{2}) - \cos[\frac{x-t}{2}+n(x-t)]}{2\sin(\frac{x-t}{2})}.$$

Dirichlet-Jordan定理和W.H. Young定理分别给出了Fourier级数和共轭Fourier级数在有界变差条件下逐点收敛性的刻画[12, 13]. 关于Fourier级数和共轭Fourier级数在有界变差条件下的收敛速度估计可参见[14, 15]. 在这一节中, 我们将证明这些结论在有理Fourier级数和共轭有理Fourier级数下也成立.

引理2.2　对于任意有限实数a和b, 我们有

$$\left|\int_a^b e^{\pm i\theta_n(x-t,x)}dt\right| \leqslant \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1+r}{1-r},$$

其中$\theta_n(x-t,x)$由(2.2)给出.

证明. 因为$\theta_n(x-t,x)$是关于参数t的连续递增函数, 那么存在$t_1 \in \mathbb{R}$使得

$$\theta_n(x-(t+t_1),x) - \theta_n(x-t,x) = \int_{x-(t+t_1)}^{x-t} \sum_{k=1}^n \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(y-t_k)+|\alpha_k|^2} dy = \pi.$$

根据积分中值定理, 我们知存在$\xi \in (x-(t+t_1), x-t)$使得

$$\pi = \sum_{k=1}^n \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(\xi-t_k)+|\alpha_k|^2} t_1 \geqslant \frac{n(1-r)}{(1+r)} t_1.$$

故$t_1 \leqslant \frac{\pi(1+r)}{n(1-r)}$. 因此, 对任意的有限实数$a$和$b$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{\pm i\theta_n(x-t,x)}dt &= \int_{a-t_1}^{b-t_1} e^{\pm i\theta_n(x-(t+t_1),x)}dt \\ &= \left(-\int_{a-t_1}^{a} - \int_a^b + \int_{b-t_1}^{b}\right) e^{\pm i\theta_n(x-t,x)}dt.\end{aligned}$$

进一步, 可得

$$\left|\int_a^b e^{\pm i\theta_n(x-t,x)}dt\right| = \frac{1}{2}\left|-\int_{a-t_1}^{a} e^{\pm i\theta_n[x-t,x]}dt + \int_{b-t_1}^{b} e^{\pm i\theta_n[x-t,x]}dt\right|$$

$$\leqslant \quad t_1 \leqslant \frac{\pi(1+r)}{n(1-r)}.$$

结论证毕. □

假设$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$为区间$[a,b]$的任意一个划分. 则

$$V_a^b(f) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|\}$$

称为f在$[a,b]$上的全变差. 如果$V_a^b(f) < \infty$, 则称f是$[a,b]$上的有界变差函数. $BV[a,b]$表示$[a,b]$上的有界变差函数的全体. 为了给出有理Fourier级数和共轭有理Fourier级数在有界变差条件下的收敛速度估计, 我们需要下面引理.

引理2.3 假设$g \in BV[-\pi,\pi]$且$g(0) = 0$. 那么

$$\left|\Omega_T^n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/n\leqslant|t|\leqslant\pi} g(t)\frac{T\left(t/2+\theta_n(x-t,x)\right)}{2\sin(t/2)}dt\right| \leqslant \frac{2(1+r)}{n\pi(1-r)}\sum_{k=1}^{n} V_{-\pi/k}^{\pi/k}(g),$$

其中$\theta_n(t,x)$由(2.2)给出, $T\,(t)$ 表示$\cos\,(t)$ 或者$\sin\,(t)$.

证明. 因为Ω_T^n可表示为

$$\Omega_T^n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi} g(t)\frac{T\left(t/2+\theta_n(x-t,x)\right)}{2\sin(t/2)}dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi} g(-t)\frac{T\left(-t/2+\theta_n(x+t,x)\right)}{2\sin(-t/2)}dt.$$

令

$$\Lambda_{T1}^n(t) = \int_t^{\pi} \frac{T\left(y/2+\theta_n(x-y,x)\right)}{2\sin(y/2)}dy, \qquad \Lambda_{T2}^n(t) = \int_t^{\pi} \frac{T\left(-y/2+\theta_n(x+y,x)\right)}{2\sin(-y/2)}dy.$$

利用分部积分公式, 我们有

$$\begin{aligned}
\Omega_T^n &= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi} g(t)d\Lambda_{T1}^n(t) - \frac{1}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi} g(-t)d\Lambda_{T2}^n(t) \\
&= \frac{1}{\pi}g(\pi/n)\Lambda_{T1}^n(\pi/n) + \frac{1}{\pi}g(-\pi/n)\Lambda_{T2}^n(-\pi/n) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi} \Lambda_{T1}^n(t)dg(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi} \Lambda_{T2}^n(t)dg(-t).
\end{aligned}$$

根据引理2.2和积分第二中值定理, 对于$i = 1$ 或2, 有

$$|\Lambda_{T_i}^n(t)| \leqslant \frac{1}{2\sin(t/2)}\cdot\frac{\pi(1+r)}{n(1-r)} \leqslant \frac{\pi(1+r)}{n(1-r)}\cdot\frac{1}{t}, \quad t \in (0,\pi).$$

自然地, 我们有

$$|\Omega_T^n| \leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}\left[g(\pi/n) + g(-\pi/n)\right] + \frac{1}{n}\cdot\frac{1+r}{1-r}\int_{\pi/n}^{\pi} \frac{|dg(t)| + |dg(-t)|}{t}.$$

如果$g \in BV[-\pi,\pi]$且$g(0) = 0$, 那么可进一步得

$$\begin{aligned}
|\Omega_T^n| &\leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}V_{-\pi/n}^{\pi/n}(g) + \frac{1}{n}\cdot\frac{1+r}{1-r}\int_{\pi/n}^{\pi} t^{-1}dV_{-t}^{t}(g) \\
&= \frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}V_{-\pi}^{\pi}(g) + \frac{1}{n}\cdot\frac{1+r}{1-r}\int_{\pi/n}^{\pi} V_{-t}^{t}(g)t^{-2}dt.
\end{aligned}$$

又因为

$$\int_{\pi/n}^{\pi} V_{-t}^{t}(g)t^{-2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{1}^{n} V_{-\pi/t}^{\pi/t}(g)dt = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1} V_{-\pi/t}^{\pi/t}(g)dt \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} V_{-\pi/k}^{\pi/k}(g),$$

所以

$$|\Omega_T^n| \leqslant \frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}V_{-\pi}^{\pi}(g) + \frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}\sum_{k=1}^{n} V_{-\pi/k}^{\pi/k}(g) \leqslant \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}\sum_{k=1}^{n} V_{-\pi/k}^{\pi/k}(g).$$

结论证毕. □

在一些文献中, 周期Hilbert变换被定义为

$$\tilde{f}(x) = \lim_{h\to 0^+}\tilde{f}(x;h) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{h\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}dt. \tag{2.4}$$

对于有界变差函数, 文献[14, 15]给出了Fourier级数和共轭Fourier级数在有界变差条件下的收敛速度的估计. 在下面, 我们相应地给出有理Fourier级数和共轭有理Fourier级数在有界变差下的收敛速度估计。

定理2.4 如果$f \in BV[-\pi,\pi]$ 且f在x处连续, 那么我们有

$$|S_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{3(1+r)}{n(1-r)}\sum_{k=1}^{n} V_{-\pi/k}^{\pi/k}(\varphi_x) \tag{2.5}$$

和

$$\left|\tilde{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x,\frac{\pi}{n})\right| \leqslant \frac{2(1+r)}{n(1-r)}\sum_{k=1}^{n} V_{-\pi/k}^{\pi/k}(\varphi_x), \tag{2.6}$$

其中$S_n(f)$和$\tilde{S}_n(f)$分别由(1.4)和(1.6)给出.

证明. 我们知道$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t,x)dt = \pi$和$\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{D}_n(t,x)dt = 0$, 其中$D_n(t,x)$和$\tilde{D}_n(t,x)$由(2.3)给出. 令$\varphi_x(t) := f(x) - f(x-t)$, 则

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\frac{\pi}{n}}\varphi_x(t)D_n(x-t,x)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}\leqslant|t|\leqslant\pi}\varphi_x(t)D_n(x-t,x)dt = A + B$$

和

$$\tilde{S}_n(f)(x) - \tilde{f}(x,\frac{\pi}{n}) = -\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\frac{\pi}{n}}\varphi_x(t)\tilde{D}_n(x-t,x)dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}\leqslant|t|\leqslant\pi}\varphi_x(t)\frac{\cos[\frac{t}{2}+\theta_n(x-t,x)]}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \tilde{A} + \tilde{B}.$$

如果f 在x 处连续, 那么$\varphi_x(0) = 0$. 再根据不等式$|D_n(x-t,x)| \leqslant (n+1)\cdot\frac{1+r}{1-r}$ 和$|\tilde{D}_n(x-t,x)| \leqslant n\cdot\frac{1+r}{1-r}$, 我们有

$$|A| \leqslant \frac{n+1}{\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}\int_{-\pi/n}^{\pi/n}|\varphi_x(t) - \varphi_x(0)|dt \leqslant \frac{2(1+r)}{1-r}V_{-\pi/n}^{\pi/n}(\varphi_x) \tag{2.7}$$

和

$$|\tilde{A}| \leqslant \frac{n}{\pi}\cdot\frac{1+r}{1-r}\int_{-\pi/n}^{\pi/n}|\varphi_x(t) - \varphi_x(0)|dt \leqslant \frac{1+r}{1-r}V_{-\pi/n}^{\pi/n}(\varphi_x). \tag{2.8}$$

结合(2.7), (2.8)和引理2.3, 结论得证. □

记$\varphi_x(t) := f(x-t) - f(x)$. 如果$f \in BV[-\pi,\pi]$且在$x$处连续, 那么$\varphi_x(t) \in BV[-\pi,\pi]$, $\varphi_x(t)$在$t=0$处连续且$\varphi_x(0)=0$. 故由$\varphi_x(t)$定义的全变差函数$V_{-t}^{t}(\varphi_x), t\in[0,\pi]$, 也在$t=0$处连续且满足

$$V_{-\pi/n}^{\pi/n}(\varphi_x) \to 0 \quad (n\to\infty).$$

这也就意味着, 当$n\to\infty$, 不等式(2.5) 和(2.6) 的右边是趋于0的. 自然地, 对于有理Fourier级数和共轭有理Fourier级数, 我们可得到类似于Fourier级数的Dirichlet-Jordan定理和W.H.Young 定理.

定理2.5 假设$f \in BV[-\pi,\pi]$且f 在x处连续. 如果由(2.4)定义的$\tilde{f}(x)$在x处存在, 那么有以下成立

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x);$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n(f)(x) = \tilde{f}(x).$$

3 有理Fourier级数在调和有界变差条件下的收敛性研究

假设$a = x_0 < a_1 < ... < x_n = b$为区间$[a,b]$的任意一个分划. 则

$$V_f^H[a,b] = \sup\{\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_i) - f(x_{i-1})|}{n}\} \tag{3.1}$$

表示f在$[a,b]$上的调和全变差. 如果$V_f^H[a,b] < \infty$, 则称f是$[a,b]$上的调和有界变差函数. $HBV[a,b]$表示定义在$[a,b]$上的调和有界变差函数的全体. 显然, 如果$f \in HBV[-\pi,\pi]$, 则$f \in BV[-\pi,\pi]$. 在本节, 我们将把定理2.5的结论推广到调和有界变差函数上.

引理3.1 假设$f \in L^1(a,b)$, 其中(a,b) 可为有限区间或无穷区间. 那么, 当$n\to\infty$, 我们有

$$\gamma_n(f) = \int_a^b f(t) e^{\pm i\theta_n(x-t,x)} dt \to 0.$$

证明. 因为具有紧支集的阶梯函数构成的全体在$L^1(\mathbb{R})$中稠密, 故对任意给定的$\epsilon > 0$, 存在具有紧支集的阶梯函数$f_\epsilon(t) = \sum\limits_{j=1}^{k} c_j \chi_{(a_j,b_j)}(t)$ 使得

$$\int_a^b |f(t) - f_\epsilon(t)| dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_\epsilon(t)| dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

根据引理2.2, 对于所选$f_\epsilon(t)$, 存在充分大的n使得

$$\left| \int_a^b f_\epsilon(t) e^{\pm i\theta_n(x-t,x)} dt \right| = \left| \sum_{j=1}^{k} c_j \int_{(a,b)\cap(a_j,b_j)} e^{\pm i\theta_n(x-t,x)} dt \right| \leqslant \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1+r}{1-r} \sum_{j=1}^{k} c_j < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此

$$|\gamma_n(f)| \leqslant |\gamma_n(f_\epsilon)| + |\gamma_n(f - f_\epsilon)| < \epsilon.$$

结论得证. □

引理3.1是Riemman-Lebesgue引理的推广. 利用此结论, 我们可以证明定理2.5的结论在调和有界变差条件下也成立.

定理3.2　假设$f \in HBV[-\pi,\pi]$且f在x处连续. 如果由(2.4)定义$\tilde{f}(x)$在x处存在, 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x);$$

和

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n(f)(x) = \tilde{f}(x).$$

证明. 我们首先证明$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)$. 因为$\theta_n(x-t,x)$ 是关于变量t的连续递增且可微的函数, 那么对于任意的整数l, 存在$t_{n_l} \in \mathbb{R}$使得

$$\int_{x-t_{n_l}}^{x} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(y-t_k)+|\alpha_k|^2} dy = l\pi.$$

根据第一积分中值定理, 有

$$\frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{|l|\pi}{n} \leqslant |t_{n_l}| \leqslant \frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{|l|\pi}{n}.$$

令$K_n := [\frac{\delta n(1-r)}{\pi(1+r)}]$. 对任意的$\delta>0$, 有

$$\delta\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 - \frac{\pi}{n}\cdot\left(\frac{1-r}{1+r}\right) < \frac{\pi(1-r)}{n(1+r)}K_n \leqslant |t_{n_{(\pm K_n)}}| \leqslant \frac{\pi(1+r)}{n(1-r)}K_n \leqslant \delta.$$

记$\varphi_x(t) := f(x-t)-f(x)$. 当$|t|$充分小时, $\tan(t/2)\sim t/2$ 且有$|t_{n(\pm K_n)}| > \delta\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 - \frac{\pi}{n}\frac{1-r}{1+r}$. 那么根据引理3.1, 可得

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x)-f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\frac{\sin\theta_n(x-t,x)}{2\tan(t/2)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\cos\theta_n(x-t,x)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\frac{\sin\theta_n(x-t,x)}{t}dt + o(1) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{t_{n_{-1}}}^{t_{n_1}} + \sum_{i=1}^{K_n-1}\int_{t_{n_i}}^{t_{n_{i+1}}} + \sum_{i=-K_n}^{-2}\int_{t_{n_i}}^{t_{n_{i+1}}}\right)\varphi_x(t)\frac{\sin\theta_n(x-t,x)}{t}dt + o(1) \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + o(1).
\end{aligned}$$

注意到$\varphi_x(t)$在$t=0$处连续, $\varphi_x(0)=0$和$\left|\frac{\sin\theta_n(x-t,x)}{t}\right| \leqslant n\frac{1+r}{1-r}$, 那么

$$|I_1| \leqslant \frac{n(1+r)}{\pi(1-r)}(|t_{n_1}|+t_{n_{(-1)}}) \sup_{0<|t|<\frac{\pi(1+r)}{n(1-r)}}|\varphi_x(t)| \leqslant 2\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 \sup_{0<|t|<\frac{\pi(1+r)}{n(1-r)}}|\varphi_x(t)| = o(1).$$

下面, 我们证$I_2 = o(1)$. 令$\omega_n^i(x,y) = \theta_n^{-1}[\theta_n(x)-(y+i\pi)]$, 其中$\theta_n(x)$由(2.1)给出. 那么$I_2$可进一步表示为

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{t_{n_i}}^{t_{n_{i+1}}}\sum_{i=1}^{K_n-1}\varphi_x(t)\frac{\sin\theta_n(x-t,x)}{t}dt\\
&= \int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{K_n-1}\frac{\varphi_x(x-\omega_n^i(x,y))}{[x-\omega_n^i(x,y)]p_n[\omega_n^i(x,y)]}(-1)^i\sin y dy,
\end{aligned}$$

其中

$$p_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(y-t_k)+|\alpha_k|^2},$$

和

$$\frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{i\pi}{n}\leqslant t_{n_i}\leqslant t=x-\omega_n^i(x,y)\leqslant t_{n_{i+1}}\leqslant\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{(i+1)\pi}{n}.$$

如果K_n为奇数, 那么I_2中被积函数的绝对值小于等于

$$\sum_{i=1}^{\frac{K_n-1}{2}}\left|\frac{\varphi_x(x-\omega_n^{2i}(x,y))}{[x-\omega_n^{2i}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i}(x,y)]}-\frac{\varphi_x(x-\omega_n^{2i-1}(x,y))}{[x-\omega_n^{2i-1}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i-1}(x,y)]}\right|. \tag{3.2}$$

如果K_n 为偶数, 根据第二积分中值定理和引理3.1, I_2中的被积函数的最后一项满足

$$\left|\int_{t_{n_{K_n-1}}}^{t_{n_{K_n}}}\varphi_x(t)\frac{\sin\theta_n(x-t,x)}{t}dt\right|<\frac{2}{\delta}\left|\int_{t_{n_{K_n-1}}}^{\xi}\varphi_x(t)\sin\theta_n(x-t,x)dt\right|=o(1),$$

其中$\xi\in(t_{n_{K_n-1}},t_{n_{K_n}})$. 因此, 我们可假设$K_n$为奇数. 从而求和公式(3.2)中的通项可写为

$$\frac{\varphi_x[x-\omega_n^{2i}(x,y)]-\varphi_x[x-\omega_n^{2i-1}(x,y)]}{[x-\omega_n^{2i}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i}(x,y)]}+\varphi_x[x-\omega_n^{2i-1}(x,y)]$$
$$\left\{\frac{1}{[x-\omega_n^{2i}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i}(x,y)]}-\frac{1}{[x-\omega_n^{2i-1}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i-1}(x,y)]}\right\}.$$

因为有不等式

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 2i\pi\leqslant[x-\omega_n^{2i}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i}(x,y)]\leqslant\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2(2i+1)\pi$$

和

$$|\omega_n^{2i}(x,y)-\omega_n^{2i-1}(x,y)|\leqslant\frac{(1+r)\pi}{(1-r)n},$$

所以

$$\begin{aligned}
&|\quad\frac{1}{[x-\omega_n^{2i}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i}(x,y)]}-\frac{1}{[x-\omega_n^{2i-1}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i-1}(x,y)]}|\\
&\leqslant\quad\frac{|\omega_n^{2i}(x,y)-\omega_n^{2i-1}(x,y)|\left[p_n[\omega_n^{2i-1}(x,y)]+|x-\omega_n^{2i}(x,y)|p_n'(\eta)\right]}{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 2i(2i-1)\pi^2}\\
&\leqslant\quad\frac{\frac{(1+r)\pi}{(1-r)n}\left[n\frac{1+r}{1-r}+\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{(2i+1)\pi}{n}\cdot\frac{2nr(1+r)}{(1-r)^3}\right]}{\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 2i(2i-1)\pi^2}\\
&\leqslant\quad\frac{C_r}{i^2},
\end{aligned}$$

其中C_r是与r相关的常数. 对任意给定的$\epsilon>0$, 可选取充分大的N_0, 使得$\sum\limits_{i=N_0+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<\epsilon$, 这样我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\frac{K_n-1}{2}} & \left|\ \varphi_x(x-\omega_n^{2i-1}(x,y))\left\{\frac{1}{[x-\omega_n^{2i}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i}(x,y)]}-\frac{1}{[x-\omega_n^{2i-1}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i-1}(x,y)]}\right\}\right| \\
& \leqslant C_r\sum_{i=1}^{N_0}\frac{|f(\omega_n^{2i-1}(x,y))-f(x)|}{i^2}+C_r\sum_{i=N_0+1}^{\frac{K_n-1}{2}}\frac{|f(\omega_n^{2i-1}(x,y))-f(x)|}{i^2} \\
& \leqslant C_r\sup_{0<t<\frac{(N_0+2)\pi}{n}\frac{1+r}{1-r}}|f(x-t)-f(x)|\sum_{i=1}^{N_0}\frac{1}{i^2}+C_r2\epsilon\sup|f(x)| \\
& \leqslant M\epsilon.
\end{aligned}$$

更进一步, 我们也有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{\frac{K_n-1}{2}}\frac{\varphi_x[x-\omega_n^{2i}(x,y)]-\varphi_x[x-\omega_n^{2i-1}(x,y)]}{[x-\omega_n^{2i}(x,y)]p_n[\omega_n^{2i}(x,y)]}\right| & \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\sum_{i=1}^{\frac{K_n-1}{2}}\frac{|\varphi_x(x-\omega_n^{2i}(x,y)))-\varphi_x[x-\omega_n^{2i-1}(x,y)]|}{2i\pi} \\
& \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 V_f^H[x,x+\delta].
\end{aligned}$$

因为f在x处连续, 当δ充分小时, 我们有$V_f^H[x,x+\delta]\leqslant\epsilon$ [16]. 所以, $I_2=o(1)$. 通过同样的方法, 我们也可以证得$I_3=o(1)$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f)(x)=f(x)$.

接下来, 我们证$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_n(f)(x)=\tilde{f}(x)$. 因为$f$在$x$处连续且$\tilde{f}(x)$在$x$处存在, 所以

$$\tilde{S}_n(f)(x)-\tilde{f}(x)=\tilde{S}_n(f)(x)-\tilde{f}(x,\frac{\pi}{n})+o(1).$$

由于

$$\begin{aligned}
\left|\left(\int_{t_{n_l}}^{\pi/n}+\int_{-\pi/n}^{t_{n_{-1}}}\right)\frac{\varphi_x(t)}{2\tan t/2}dt\right| & \leqslant \sup_{0<|t|<\frac{\pi}{n}}|\varphi_x(t)|\left(\int_{\min\{t_{n_1},\pi/n\}}^{\max\{t_{n_1},\pi/n\}}+\int_{\min\{t_{n_{-1}},-\pi/n\}}^{\max\{t_{n_{-1}},-\pi/n\}}\right)\frac{1}{|t|}dt \\
& \leqslant \sup_{0<|t|<\frac{\pi}{n}}|\varphi_x(t)|\cdot 2\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)=o(1).
\end{aligned}$$

所以根据引理3.2, 我们有

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_n(f)(x)-\tilde{f}(x,\frac{\pi}{n}) &= -\frac{1}{\pi}\int_{t_{n_{-1}}}^{t_{n_1}}\varphi_x(t)\frac{1-\cos\theta_n(x-t,x)}{t}dt \\
&+ \frac{1}{\pi}\left(\sum_{i=1}^{K_n-1}\int_{t_{n_i}}^{t_{n_{i+1}}}+\sum_{i=-K_n}^{-2}\int_{t_{n_i}}^{t_{n_{i+1}}}\right)\varphi_x(t)\frac{\cos\theta_n(x-t,x)}{t}dt+o(1) \\
&= I_1'+I_2'+I_3'+o(1).
\end{aligned}$$

注意到$\left|\frac{1-\cos\theta_n(x-t,x)}{t}\right|\leqslant\frac{n^2}{2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2|t|$, 所以

$$|I_1'|\leqslant\frac{n^2}{2\pi}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\sup_{0<|t|<\frac{\pi(1+r)}{n(1-r)}}|\varphi_x(t)|\int_{t_{n_{-1}}}^{t_{n_1}}|t|dt=o(1).$$

对于I_2' 和I_3', 类似于证明$I_2 = o(1)$, 我们也可得$I_2' = o(1)$和$I_3' = o(1)$. 因此, 有$\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n(f)(x) = \tilde{f}(x)$. 结论得证. □

致谢 感谢审稿人有益的建议.

参考文献

1 Sansone G. Orthogonal Functions. Interscience Publishers: NewYork, 1959.

2 Davis H F. Fourier series and Orthogonal functions. Dover Publications: New York, 1989.

3 Wang R, Xu Y S, Zhang H Z. Fast nonlinear fourier expansions. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 2009, 1(3):373-405.

4 Tan L H, Shen L X, Yang L H. Rational orthogonal bases satisfying the Bedrosian identity. *Advances in Computational Mathematics*, 2010, 33(3):285-303.

5 Qian T, Wang Y B. Adaptive Fourier series-A variation of greedy algorithm. *Advances in Computational Mathematics*, 2011, 34(3):279-293.

6 Bultheel A, Gonzàlez-Vera P, Hendriksen E, Njàstad O. Orthogonal Rational Functions. Cambridge University Press, 1999.

7 Walsh J L. Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Plane. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1969.

8 Ninness B, Gustafsson F. A unifying construction of orthonormal bases for system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(4):515-521.

9 Ninness B, Hjalmarsson H, Gustafsson F. Generalized Fourier and Toeplitz Results for Rational Orthonormal Bases. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1999, 37(2):429-460.

10 Akcay H. On the uniform approximation of discrete-time systems by generalized Fourier series. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2001, 49(7):1461-1467.

11 Heuberger P S C, Van den Hof P M J, Wahlberg B. Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions. Springer Verlag:London, 2005.

12 A.Zygmund. Trigonometric Series. Cambridge University Press, 1959.

13 Young W H. Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourier-schen Reihe. *Münch. Ber.*, 1911, 41: 361-371.

14 Bojanic R. An estimate of the rate of convergence of Fourier series of functions of bounded variation. *Publications de l'Institut Math* é *matique* ,1979, 26:57-60.

15 Mazhar S M, Albudaiwi A. An estimate of the rate of convergence of the conjugate Fourier series of functions of bounded variation. *Acta Mathematica Hungarica*, 1982,49:377-380.

16 Walterman D. On $\Lambda-$bounded variation. *Studia Mathematica*,1976, 57:33-45.

17 Walterman D. Fourier series of functions of $\Lambda-$bounded variation. *Proceeding of the American society* , 1979,74(1):119-123.

On convergence of rational Fourier series of functions of bounded variations

Lihui Tan, Tao Qian

Abstract In this paper, we extended some classical results of Fourier series to rational Fourier series. We give an estimate of convergence rate of the rational Fourier series of functions of bounded variation and an analogous one for the conjugate rational Fourier series. As its applications, we deduce the Dirichlet-Jordan's theorem and W.H.Young's theorem for rational Fourier series of functions of bounded variation. Finally, we extend these two theorems to harmonic bounded variation.

Keywords: rational Fourier series, conjugate rational Fourier series, convergence rate, variation functions.
MSC(2000): 30B10, 30B30.