

# 基于 Takenaka-Malmquist 自适应时频分布的特征指标 ——来自上证和深证的数据

陈维国<sup>1,2</sup>, 钱 涛<sup>3</sup>, 李建平<sup>2</sup>, 谢启伟<sup>1,4</sup>

(1. 北京工业大学 经济与管理学院, 北京 100124; 2. 中国科学院 科技战略咨询研究院, 北京 100190; 3. 澳门科技大学 系统工程研究所, 澳门 999078; 4. 中国科学院 自动化研究所 复杂系统管理与控制国家重点实验室, 北京 100190)

**摘 要** 股票价格指数度量并反映了股票市场总体价格水平及其变动趋势, 包含了丰富的市场信息, 受到投资者和政策制定者的普遍关注. 利用一定的数学方法对其进行分析和研究, 挖掘股指的潜在价值, 对加快资本市场治理, 提升金融效率, 促进国民经济的平稳快速发展具有十分重要的意义. 本文利用基于 Takenaka-Malmquist 自适应傅里叶分解 (简称自适应傅里叶分解或 AFD) 的时频分布, 有效提取了股票价格指数的时频特征, 分析股票市场的变动趋势. 为满足自适应傅里叶分解的要求, 首先利用 H-P 滤波算法对时间序列进行预处理, 去除时间序列的趋势项, 然后利用 AFD 算法处理周期项数据, 在此基础上得到股票价格指数的时频分布, 并进一步分析股指变动趋势. 基于自适应傅里叶分解的算法可以有效提取股指在时频两域的信息, 避免了单一域分析的缺陷, 且比现有的小波分解方法具有更高的分辨率和准确度. 为检验指标的有效性, 本文利用上海证券交易所的上证综合指数 (代码 000001) 和深圳证券交易所深证成份指数 (代码 399001) 实证检验了指标的有效性, 结果表明基于自适应傅里叶分解的时频分布提出的股市技术分析指标可以用于中短期股票市场的变动特征分析.

**关键词** 自适应傅里叶分解; 时频分布; 股票价格指数; Takenaka-Malmquist 系统

## Characteristic index based on Takenaka-Malmquist adaptive time-frequency distribution — Data from Shanghai Composite Index and Shenzhen Component Index

CHEN Weiguo<sup>1,2</sup>, QIAN Tao<sup>3</sup>, LI Jianping<sup>2</sup>, XIE Qiwei<sup>1,4</sup>

(1. School of Economics and Management, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. Institutes of Science and Development, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 3. Macau Institute of Systems Engineering, Macau University of Science and Technology, Macau 999078, China; 4. The State Key Laboratory for Management and Control of Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract** The stock price index measures and reflects the overall price level of the stock market and its trend. It contains abundant market information and has been widely concerned by investors and policymakers. It is of great significance to analyze, study, and mine the potential value of the stock

**收稿日期:** 2019-10-07

**作者简介:** 陈维国 (1979–), 男, 山东日照人, 博士研究生, 研究方向: 风险管理, 金融市场, E-mail: chungweiguo@126.com; 钱涛, 男, 中国澳门人, 教授, 博士, 研究方向: 信号分析, E-mail: tqian@must.edu.mo; 李建平 (1976–), 男, 浙江人, 研究员, 博士, 研究方向: 风险管理, E-mail: ljp@casipm.ac.cn; 通信作者: 谢启伟 (1977–), 男, 湖北宜昌人, 教授, 博士, 研究方向: 管理科学, 数据挖掘, E-mail: qiwei.xie@bjut.edu.cn.

**基金项目:** 澳门科学技术发展基金 (079/2016/A2); 中国科学院自动化研究所复杂系统管理与控制国家重点实验室 2020 年开放课题基金

**Foundation item:** Macau Science and Technology Development Fund (079/2016/A2); Open Research Fund in 2020 the State Key Laboratory for Management and Control of Complex Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences

**中文引用格式:** 陈维国, 钱涛, 李建平, 等. 基于 Takenaka-Malmquist 自适应时频分布的特征指标 —— 来自上证和深证的数据 [J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(12): 3112–3123.

**英文引用格式:** Chen W G, Qian T, Li J P, et al. Characteristic index based on Takenaka-Malmquist adaptive time-frequency distribution — Data from Shanghai Composite Index and Shenzhen Component Index[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2020, 40(12): 3112–3123.

index by using some mathematical methods for accelerating capital market governance, improving financial efficiency, and promoting the steady and rapid development of the national economy. This paper proposes an adaptive Fourier decomposition (AFD) method based Takenaka-Malmquist approach to extract the time-frequency characteristics of stock price index and analyze the trend of stock market effectively. In order to satisfy the requirement of AFD, the H-P filtering algorithm is applied first to pre-process the time series and remove the trend term. Then the AFD algorithm is employed to process the periodic term data. Finally, the trend of the stock index is analyzed by the time-frequency distribution chart of the stock price index. The algorithm based on AFD can effectively extract the information of stock index in both time and frequency domains, which overcomes the drawback of single domain analysis. Meanwhile it has higher resolution and accuracy than the existing wavelet decomposition methods. The effectiveness of the proposed indicator is tested by using the Shanghai Composite Index (Stock code 000001) and Shenzhen Component Index (Stock code 399001), respectively. The results demonstrate that the technical analysis of the stock market index established by the time-frequency distribution based on AFD can be used to analyze the characteristics of short and medium-term stock market changes.

**Keywords** adaptive Fourier decomposition; time-frequency distribution; stock price index; Takenaka-Malmquist system

## 1 引言

改革开放以来, 中国经济发展迅猛, 居民财富不断增加, 越来越多的家庭开始关注理财, 而传统的活期存款与定期存款已无法满足投资需求, 投资者开始将资金投向股票市场。股票市场的收益相对较高, 但是股票价格受到宏观经济政策、公司内部战略以及股票市场的人为扰动等因素的影响, 行情变幻莫测, 波动性较大, 市场风险也相对较高。身临其中的积极投资者通过对股价、成交量和股票指数涨跌的图表或技术指标的变动, 研究市场行为, 推测股票价格的变动趋势, 进行股票交易。为了准确描述股票市场的波动性, 把握股票买卖的有利时机, 研究者们提出了各种各样的技术分析指标。

股票投资的分析方法主要有基本分析、技术分析、演化分析三种。基本分析主要应用于投资标的物的选择上, 基本分析法是以传统经济学理论为基础, 以企业价值作为主要研究对象, 通过对决定企业内在价值和影响股票价格的宏观经济形势、行业发展前景、企业经营状况等进行详尽分析, 形成相应的投资建议。技术分析法是以传统证券学理论为基础, 以股票价格作为主要研究对象, 从股价变化的历史图表入手, 对股票市场波动规律进行分析。演化分析法是以演化证券学理论为基础, 将股市波动的生命运动特性作为主要研究对象, 从股市的代谢性、趋利性、适应性、可塑性、应激性、变异性和节律性等入手, 对市场波动方向与空间进行动态跟踪研究, 为股票交易决策提供机会和风险评估。股票市场时间序列数据包含丰富的时频信息, 上述分析方法通常只考虑时域信息而忽略频域信息。利用这些分析方法去研判股票走势, 所得出的结论往往和实际走势存在着特别大的差异, 甚至会得出相反的结果。通过分析, Huang<sup>[1]</sup> 等指出经典统计模型存在一些问题。Huang 认为多数时候市场过程不是静止不变的, 而是动态变化的。但是大多数统计模型是静态模式的, 只能适应性地反映现实的动态金融数据。此外, 传统的金融统计模型分析方法通常要求时间序列是平稳的, 但多数股票市场时间序列数据与信号相似, 包含很多噪音, 具有非线性、非平稳性等特征。鉴于传统分析方法的局限性, 本文借鉴信号处理方法, 利用基于 Takenaka-Malmquist 的自适应傅里叶分解 (简称自适应傅里叶分解或 AFD), 将时间序列的时域分析与频域分析相结合, 提出可能的解决方案, 弥补传统分析方法仅在单一域 (时域或者频域) 内进行分析的缺陷。相比于短时傅里叶变换 (STFT, short time Fourier transform)、小波变换 (WT, wavelet transform) 等在时频二维表示方面的不足, 自适应傅里叶在时频分析中具有独特优势, 分解时无需借助窗函数, 也不依赖于信道分解基函数, 同时, 利用自适应傅里叶分解 (adaptive Fourier decomposition, AFD) 对信号进行分解时, 其表示基函数都由能量极大选择原则进行自适应选取, 具有收敛速度快的特点, 可实现对原始函数的最优稀疏表示。基于自适应傅里叶分解 (AFD) 在处理非平稳数据时频分析方面的种种优势, 目前自适应傅里叶分解已经在信号处理、图像处理、电力和通信等领域获得了极为广泛的应用<sup>[2-4]</sup>, 但直到近期才逐渐与金融研究相结合。

在某种程度上, 金融时间序列信号具有工程信号的特征, 很多研究者也关注到这一点, 开始将时频两域

的分析方法应用于经济现象研究. Berdiev<sup>[5]</sup> 利用小波分析方法探讨了中国、日本、美国和其他亚太国家经济发展周期的同步性. In 和 Kim<sup>[6]</sup> 提出一种新的方法, 利用小波分析检验了套期保值比率以及股票市场与期货市场之间的实证关系. 在 Li 和 Kuo<sup>[7]</sup> 的工作中, 为了克服知识发现模型在金融研究中的多重分辨率障碍, 利用离散小波转换进行特征提取. Gallegati<sup>[8]</sup> 基于最大重叠离散小波转换 (MODWT) 检验了股票市场投资收益和经济活动之间的关系. Addo<sup>[9]</sup> 等运用复 Morlet 小波分析检测和表征美国工业生产指数时间序列的周期, 证实小波分析能够更有效地分析时间序列的隐藏信息. Huang 和 Wu<sup>[10]</sup> 利用小波分析转换对原始数据进行预处理, 基于多核偏最小二乘回归和整合递归自组织映射 (RSOM) 建立混合模型进行金融预测. Jammazi<sup>[11]</sup> 应用哈尔小波分解研究了原油价格冲击的本质以及冲击对股票市场收益的影响, 结果表明哈尔小波分解是提高平滑信号在预测真实原油波动关键特征准确性的重要一步.

除了小波分析外, 国内外学者还利用经验模态分解 (EMD) 方法做了许多研究. Guhathakurta, Mukherjee 和 Chowdhury<sup>[12]</sup> 利用经验模态分解 (EMD) 分析了两个不同金融时间序列. Premanode 和 Toumazou<sup>[13]</sup> 提出了新的算法, 在支持向量回归下利用微分经验模态分解 (EMD) 算法提升汇率的预测水平. 国内学者谢启伟, 李建平<sup>[14]</sup> 等人从窄带信号的定义出发, 弥补了经验模式算法由本质模式函数 (IMF) 作为基础的缺陷, 合理解释了经验模式分解算法, 在理论上研究了筛过程的本质特征, 并利用局部窄带分解算法分析了一组电力数据, 以指导电力的分配. Xie<sup>[15]</sup> 等利用改进的经验模态分解算法对模拟信号和实际信号进行分析, 证实了用带宽准则得到的本质模式函数能够逼近真实分量, 反映被分析信号的本征信息并利用带宽 EMD 将电能消耗数据分解为周期项和趋势项. 李合龙, 冯春娥<sup>[16]</sup> 等人运用集成经验模态分解 (EEMD) 方法将投资者情绪和股指价格序列分解、重构, 考察了投资者情绪和股指价格序列在不同时间尺度下的波动关联性. 阮连法<sup>[17]</sup> 等利用经验模态分解方法研究了杭州市 2007 年至 2011 年的新建商品住宅交易的周度价格, 为短期房价预测提供了思路. 王璇<sup>[18]</sup> 等基于股票价格波动的多尺度特征, 利用 BEMD-Copula-GARCH 模型度量了以恒生指数与上证综指为数据样本的投资组合风险. 吴登生<sup>[19]</sup> 等利用经验模态分解算法 (EMD) 对我国生猪价格进行多尺度特征分解, 并采用结构变点分析算法对各个特征模态进行结构变点检验, 分析了我国生猪价格的四个模态构成. 李合龙<sup>[20]</sup> 等提出改进的 EMD 方法, 研究了我国股票市场行业间的波动溢出效应.

此外, 熊正德<sup>[21]</sup> 等基于时域和频域分析相结合的方式运用 GARCH 模型、小波多分辨率方法和因果检验对汇改后的外汇市场和以大豆期货市场为例的农产品期货市场的联动性进行了实证研究. 武华华, 匡海波<sup>[22]</sup> 等人运用结合 EMD 分解和小波分析构建了 EMD-WA 模型, 分析了国际干散货市场 BDI 指数的波动周期特征. Korotayev<sup>[23]</sup> 运用频谱分析方法验证了世界 GDP 存在 52~53 年的康德拉耶夫长周期、7~9 年的朱格拉短周期以及 3~4 年的基钦短周期. Huang<sup>[1]</sup> 等利用希尔伯特-黄变换 (HHT) 检验了市场的可变性或者说测度了市场的波动性. Zhang<sup>[24]</sup> 等提出了适用于一大类简单波信号的计数瞬时时频分布, 并将之应用于香港恒生指数的研究, 通过与 BP 神经网络比较证明了计数瞬时时频分布的有效性和可行性.

由以上文献可以看出, 在经济金融的研究中, 应用比较广泛的时频分析的方法主要有小波分析和经验模态分解两大类. 但这两个时频分析方法的使用需要一定的前提假设和条件. 比如, 在小波分析方法中, 小波母函数的选取将直接影响时频分析图的视觉呈现效果, 在经验模态分解方法中, 可能存在负的瞬时频率, 且各个 IMF 分量正交性差, 影响了时频分析的结果. 基于传统时频分析方法广泛缺乏自适应性的现实, 改进或采用新的时频分析方法, 对于研究股票市场价格特征, 扩大时频分析在金融时间序列分析中的应用范围, 具有重要的理论依据和现实意义. 本文利用自适应傅里叶分解 (AFD), 将频域分析引入到股票价格序列的分析中. 广义上看, 股票价格等金融变量是某种信号函数, 在数学中, 时域分析和频域分析是研究信号的常用方法, 但时域分析无法得出频率的信息, 而频域分析无法给出特定频率发生的时间段信息, 因此单一域的分析总是不完整的. 对于股票价格信号等非线性、非平稳的金融信号而言, 时频两域的联合分析是重要的研究方法, 由此引入时频分析. 此外, 利用 AFD 方法分解时间序列, 能通过能量极大选择原则进行自适应选取, 不存在窗口函数等参数选择问题, 观测误差显著降低; 相比于经验模态分解, AFD 分解消除了交叉项效应; 采用 AFD 可获得高分辨率的结果, 在组成频率方面提供更详细和准确的信息. 本文采用基于自适应傅里叶分解的瞬时时频分布方法分析股票市场变动特征, 通过瞬时时频分布图能够有效表征某一段时间内股价的时频特性. 瞬

时时频分布能够表征信号的局部特征, 整个持续期上的瞬时频率反映了信号频率的时变规律. 信号的瞬时频分布是基于自适应傅立叶分解算法, 自适应傅立叶分解是一种与小波转换和窗口傅里叶变换平行的全新函数分解算法. 本文首先详细阐述了基于小波分解的股价变动信号处理模型, 并利用小波尺度图分析了沪深两市的股票价格序列. 然后回顾了瞬时时频分布的概念并总结了自适应傅里叶分解算法, 利用自适应傅里叶分解分析沪深股票市场的时间序列数据, 根据不同的频率成分返回不同的时间序列, 利用瞬时时频分布分析沪深两市的市场变动情况, 并与基于小波分解的股价特征指标进行比较分析, 最后得出结论.

## 2 基于小波分解的股价特征指标

时频分析中常用的方法有短时傅里叶变换, 小波变换, 维格纳 - 威尔分布和经验模态分解等. 短时傅里叶变换最大的缺点是窗函数固定, 无法自适应地选择合适的时间窗; 维格纳 - 威尔分布的缺点是不满足正值性要求, 无法保证所有时间及频率范围内能量密度为正; 经验模态分解的得到的 IMF 分量的瞬时频率可能为负, 且各分量的正交性差; 而小波分析继承和发展了短时傅立叶变换局部化的思想, 通过一个随频率改变的“时间 - 频率”窗口克服了窗口大小不随频率变化的缺点. 由于其可以通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析, 在信号分析与处理、图像处理、语音处理以及众多的非线性科学领域有广泛的应用, 在时频分析中具有不可比拟的优势. 利用小波分析股票价格的时间序列, 能较好地表现股票价格的局部时频特性. 鉴于小波分析的优异特征和广泛应用性以及与小波分解的相似应用场景, 本文将基于自适应傅里叶分解 (AFD) 的股票价格趋势特征指标与基于小波分解的股票价格趋势特征指标进行比较分析, 以更好的研究 AFD 的特性.

小波分析是一种能够根据信号的不同频率成分和时间采样疏密调节窗口形状、时间窗和频率的时频局部化分析方法, 具有放大、缩小、平移功能, 因其多分辨率特性及在时频两域表征信号局部特征的能力, 而被广泛应用于信号处理和分析. 由于股票价格指数属于非平稳信号, 不但包含了一个在现实中存在的重要因素: 不确定性, 还具有海量、高维、动态变化迅速、信噪比低、非平稳、非正态、非线性、要求快速响应等特点, 有许多尖峰和突变, 这些尖峰和后尾具有较高的频率, 采用传统分析方法通常不能有效区分有用信号的高频和噪声引起的高频.

Caetano 和 Yoneyama<sup>[25]</sup> 提出的表征股市变动特征的方法是基于小波分解, 利用小波分解提取股票指数的同步频率信息. 小波分解可以由下列形式方程表示:

$$\psi \triangleq \left\{ \varphi^{a,b}(\bullet) \in L^2(R), \varphi^{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right), a \in R, b \in R \right\}, \quad (1)$$

其中, 函数  $\varphi$  是母小波, 常数  $a$  不等于 0.  $a$  和  $b$  是尺度和平移参数,  $L^2(R)$  代表平方可积函数集. 当  $f \in L^2(R)$ , 对  $\varphi^{a,b} \in \psi$ , 每一个  $a$  和  $b$  有

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi^{a,b}(t) dt, \quad (2)$$

即给定  $W_f(a, b)$ ,  $f$  可以利用下式重构.

$$f(t) = \frac{1}{c} \iint_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \varphi^{a,b}(t) dt, \quad (3)$$

其中, 常数  $c$  取决于母小波.

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega, \quad (4)$$

其中,  $\hat{\varphi}$  是  $\varphi$  的傅里叶变换.

在进行小波分解时, 利用尺度图得到小波系数, 用以表征变分频率的微小振幅振荡, 发现股市变动特征. 为了在时频图上较好地反映股指的时频信息, 应选取恰当的时间段, 如果数据过于密集, 不利于图像的观察分析, 数据过于稀疏, 则不利于市场特征分析. 本文选取上证指数和深证指数 2017 年 6 月 1 日至 2018 年 6 月 1 日共 247 个交易日的收盘价价格, 股价走势如图 1.a 和图 1.b, 可知上证指数在 2017 年 6 月 1 日到 2018 年 6 月 1 日之间共 247 个交易日中出现了大大小小数十次下跌. 其中第 166 期开始急速下跌, 第 176 期探底回升, 10 个交易日内股指从 3558 跌至 3130, 下跌 12%. 由图 1.b 可知, 相对于上证指数, 深证指数的波动更频繁, 最大的波动从第 164 期开始至 176 期探底回升, 12 个交易日中, 股指急速下跌 10.2%.

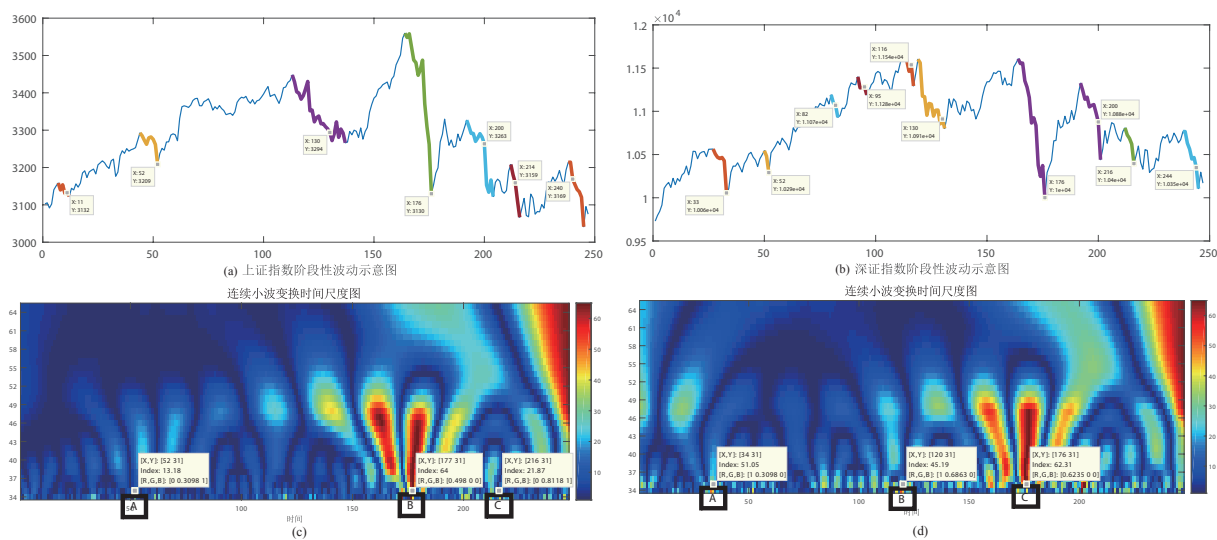


图 1 股票指数走势图及小波尺度图

利用小波分解, 得到小波尺度图, 如图 1.c 和图 1.d 所示. 结合图 1.a 和图 1.c, 上证指数在第 166 期开始急速下跌, 第 176 期探底回升, 从上证指数小波尺度图中可以发现颜色在第 176 期附近集聚加深, 这表明股指快速下跌至市场底部, 市场风险得到释放, 此时投资者可以建仓. 结合图 1.b 和图 1.d, 深证指数从第 164 期开始急速下跌至 176 期探底回升, 小波尺度图给出了相对较好的指示, 随着下跌幅度的增加, 小波尺度图的颜色逐渐加深, 市场底部时颜色最深. 结合图 1.c 和图 1.d 可以发现深证指数的波动性比上证指数大, 小波尺度图中由底部零星的深色点表征了这些较小的市场波动. 但综合上证和深证指数小波尺度图能够发现小波尺度图对于市场中的大部分价格波动缺乏明确的指示, 零星的深色点无法给出明确的投资建议. 此外, 通过颜色的深浅来判断市场的走势也使得指标相对模糊, 不容易判读.

小波分析在描述股市变化的数学模型中扮演重要的角色, 在文献 [10, 17, 18] 中, 学者利用小波分解提出了一系列指示股票下跌的方法. 这些方法中有图也有数值, 有些还结合图论, 但是它们的根本理论还是小波分解. 小波分析的缺点之一就是小波尺度图在低频区域具有较低的时间分辨率, 在高频部分具有较低的频率分辨率. 另一方面, 小波母函数  $\varphi(\bullet)$  的选择至关重要, 不同的小波母函数, 小波变换的结果也不尽相同. 因此小波母函数的选择可能会影响信号图像呈现的效果. 在某些方面, 母函数的选择从而呈现的结果可能受很多主观因素影响, 而自适应傅里叶分解无需借助窗函数也不依赖于分解基函数, 基函数都由能量极大选择原则进行自适应选取, 具有收敛速度快的特点, 可实现对原始函数的最优稀疏表示.

### 3 基于 Takenaka-Malmquist 的 AFD 时频分布图

本文利用基于自适应傅里叶分解的时频分布提出表征股市特征的新指标, 这种时频分布的全称是瞬时时频分布 (TTFD)<sup>[3]</sup>. 瞬时时频分布是基于自适应单分量分解, 首先, 将给定的信号分解为单分量之和, 这些成分单分量具有正解析瞬态频率. 单分量信号的瞬时时频分布可以直接通过它的解析瞬态频率得到. 此外, 单分量的瞬时时频函数没有交叉项, 这样既可以去掉由交叉项而引起的伪信息, 又可以减少运算量, 缩短整个算法的运算时间. 最后, 瞬时时频分布的特征就是沿解析瞬态频率图的完全聚焦. 瞬时时频分布的许多数学特性满足期望的时频分布特征, 这包括修正的总能量性质、非负性质、实值性、弱的和强的有限支持. 相对于维格纳分布, 瞬时时频分布没有交叉项干扰, 在时域和频域, 瞬时时频分布也具有比小波分析更好的解. 对于多分量信号, 引入由内在单分量瞬时时频分布叠加的合成暂态时频分布. 每一个合成暂态时频分布内在的单分量都是靶向多分量的适当单分量分解.

#### 3.1 基于 Takenaka-Malmquist 的自适应傅里叶分解算法

在详细的介绍瞬时时频分布之前, 引入自适应傅里叶分解, 自适应傅里叶分解是瞬时时频分布的基础. 传统的傅立叶展开的收敛有时比较缓慢, 这会导致整体信号能量的主要部分出现的比较慢, 当把基本函数扩展到希尔伯特空间时, 同样的问题也会出现. 为解决这个问题, 相应地提出了贪婪算法. 在介绍自适应傅里叶

算法之前, 引入 Takenaka-Malmquist<sup>[26-28]</sup> 系统  $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ . 自适应傅里叶分解正是基于 Takenaka-Malmquist 系统:

$$B_n(z) = B_{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}(z) := \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\bar{a}_n z} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z-\bar{a}_k}{1-\bar{a}_k z}. \quad (5)$$

$a_n \in D, n=1, 2, \dots, D=\{z \in C: |z| < 1\}$ ,  $C$  为复平面. 对于  $D$  中的任意序列  $\{a_n\}$ , Takenaka-Malmquist 系统是正交的. 对 TM 系统现有的所有研究, 都有一个前提条件:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|) = \infty. \quad (6)$$

这是在哈代空间  $H^2(D)$  中利用 TM 系统  $\{B_n\}$  做自适应单分量函数分解的充分必要条件. 考虑哈代空间的标准情形, 在自适应傅里叶分解中, 在  $a$  点存在一系列称为求值程序的基础函数组成一个字典序:

$$e_{\{a\}}(z) := B_{\{a\}}(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z}, a_n \in D. \quad (7)$$

本质上来说, 每一个求值程序都会有一个求值函数. 利用柯西公式, 对于任意的  $F \in H^2$ , 我们有:

$$\langle F, e_{\{a\}} \rangle = \sqrt{1-|a|^2} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it})}{e^{it}-a} de^{it} = \sqrt{1-|a|^2} F(a). \quad (8)$$

根据字典序在圆周内找到符合条件的点, 相加逼近求解. 对给定的函数  $G = G^+ \in H^2$ , 自适应傅里叶分解是其核心算法. 通常, 对于实值的信号  $\tilde{G} \in L^2$ , 存在关系

$$\tilde{G} = 2\text{Re}G^+ - C_0. \quad (9)$$

$G^+ \in H^2$  是  $\tilde{G}$  的映射,  $C_0$  为信号的傅里叶系数. 后续的算法将作用于  $G^+$ , 算出  $G^+$  便可得到  $\tilde{G}$ . 具体算法步骤如下:

1) 最大化  $|\langle G_1, e_{\{a\}} \rangle|^2$

令  $G_1 = G = G_+$ , 在  $a \in D$  中最大化

$$|\langle G_1, e_{\{a\}} \rangle|^2 = 2\pi(1-|a|^2)|G_1(a)|^2, \quad (10)$$

$$\lim_{|a| \rightarrow -1} \|g - \langle g, B_{\{a\}} \rangle B_{\{a\}}\| = \|g\|. \quad (11)$$

设  $P_r$  表示点  $r \in (0, 1)$  处单位圆的泊松核, 对于  $\epsilon > 0$ , 选择  $r$  足够接近 1, 由泊松积分的  $L^2$  逼近性质, 有

$$\begin{aligned} \|g\| &\geq \|g - \langle g, B_{\{a\}} \rangle B_{\{a\}}\| \geq \|P_r * (g - \langle g, B_{\{a\}} \rangle B_{\{a\}})\| \geq \|P_r * g\| - |\langle g, B_{\{a\}} \rangle| \|P_r * B_{\{a\}}\| \\ &\geq (1-\epsilon)\|g\| - \|g\| \|P_r * B_{\{a\}}\|. \end{aligned} \quad (12)$$

对于固定的  $r$  值,  $B_{\{a\}} \in H^\infty(D)$ ,  $z = re^{it}$ ,

$$P_r * B_{\{a\}} e^{it} = B_{\{a\}} e(z), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \|P_r * B_{\{a\}}\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}re^{it}|^2} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2|a|^2}{|1-|a|e^{it}|^2} dt \\ &= \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2} \int_0^{2\pi} P_{r|a|}(e^{it}) dt = \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

当  $|a|$  接近于 1 时, 不等式 (12) 给出

$$\|g\| \geq \|g - \langle g, B_{\{a\}} \rangle B_{\{a\}}\| \geq (1-2\epsilon)\|g\|. \quad (15)$$

这给出了 (11) 的期望极限.

根据最大投影原理, 存在  $a_1 \in D$ ,

$$|\langle G_1, e_{\{a\}} \rangle|^2 = \max\{|\langle G_1, e_{\{a\}} \rangle|^2 : a \in D\}. \quad (16)$$

具体证明过程可以参考钱涛教授的论文 [26, 27].

2) 分解给定函数

$$G(z) = G_1(z) = \langle G_1, e_{\{a_1\}} \rangle e_{\{a_1\}} + (G_1(z) - \langle G_1, e_{\{a_1\}} \rangle e_{\{a_1\}}) = \langle G_1, e_{\{a_1\}} \rangle e_{\{a_1\}} + R_1(z), \quad (17)$$

其中,  $R_1(z)$  记为标准剩余.

## 3) 进行最大筛选

$$R_1(z) = G_2(z) \frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z}, \quad (18)$$

其中

$$G_2(z) = (G_1(z) - \langle G_1, e_{\{a_1\}} \rangle e_{\{a_1\}}(z)) \frac{1 - \overline{a_1}z}{z - a_1}. \quad (19)$$

$G_2(z)$  位于哈代空间  $H^2$  中. 当  $z = a_1$  时,

$$G_1(z) - \langle G_1, e_{\{a_1\}} \rangle e_{\{a_1\}}(z) = 0. \quad (20)$$

从  $G_1$  中获得  $G_2$  的过程称为最大筛选过程.

4) 重复最大筛选过程  $N$  次

$$G(z) = \sum_{k=1}^n \langle G_k, e_{a_k} \rangle B\{a_1, a_2, \dots, a_k\}(z) + R_n(z) = \sum_{k=1}^n \langle G_k, e_{a_k} \rangle B\{a_1, a_2, \dots, a_k\}(z) + G_{n+1}(z) \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}, \quad (21)$$

其中,

$$G_{k+1}(z) = (G_k(z) - \langle G_k, e_{a_k} \rangle e_{a_k}(z)) \frac{1 - \overline{a_k}z}{z - a_k}. \quad (22)$$

利用最大投影原理得到  $a_k$ , 第  $k$  次标准剩余为

$$R_k(z) = G_{k+1}(z) \prod_{l=1}^n \frac{z - a_l}{1 - \overline{a_k}z}. \quad (23)$$

由正交性,

$$\|G\|^2 = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|^2) |G_k(a_k)|^2 + \|R_n\|^2. \quad (24)$$

对于给定初始值  $\varepsilon > 0$  在第一个  $N$  次停止时, 集合具有连续的最大筛选过程.

$$\|R\|^2 = \|G\|^2 - 2\pi \sum_{k=1}^N (1 - |a_k|^2) |G_k(a_k)|^2 \leq \varepsilon. \quad (25)$$

通常, 算法至此基本完成. 对于 AFD 算法的更多信息可以参考 [26–28].

### 3.2 基于 AFD 的算法的瞬时频分布

信号可以被分解为均匀规则的单分量, 通过一定的变换可以得到具有快速收敛特性的瞬时频. 对于单分量信号  $s(t) = \rho(t)e^{i\varphi(t)}$  定义如下:

$$P(t, \xi) = \rho^2(t) \delta_M(\xi - \varphi'(t)), \quad (t, \xi) \in R \times \left[-\frac{1}{2M}, +\infty\right), \quad (26)$$

其中,

$$\delta_M(\xi - \varphi'(t)) = \begin{cases} M, & \xi \in \left[\varphi'(t) - \frac{1}{2M}, \varphi'(t) + \frac{1}{2M}\right], \\ 0, & \xi \notin \left[\varphi'(t) - \frac{1}{2M}, \varphi'(t) + \frac{1}{2M}\right], \end{cases} \quad (27)$$

其中  $M$  为足够大的正数. 一个多分量的引致时频分布是基于单分量的分解, 如果一个多分量的平方可积解析信号  $S$  可以被快速的正交分解, 则相应的合成暂态时频分布可以被定义为:

$$P(t, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(t) \delta_M(\xi - \varphi'_k(t)), \quad (t, \xi) \in R \times \left[-\frac{1}{2M}, +\infty\right), \quad (28)$$

其中,  $P_k(t, \xi)$  是单分量  $s_k$  的暂态瞬时频分布.

### 3.3 瞬时频分布与实证分析

利用 AFD 方法处理金融时间序列, 首先要对数据进行预处理. 当原始数据存在线性趋势时, 线性趋势反映了目前股票市场的长期变化趋势, 但是这些趋势的存在会影响单分量分解结果的准确性. 因此需要将时间序列分解, 去除线性趋势项. H-P 滤波法是去除经济时间序列趋势项的常用方法 [29,30]. Zhu [31] 等采用 H-P 滤波, 将宏观经济时间序列分解为趋势项和波动项, 并提出了一种能够有效控制波动分量大小的平滑参数确



定方法. Guerrero<sup>[32]</sup> 基于 H-P 滤波法, 提出了一种新的选择季度序列平滑常数的方法, 并利用墨西哥 GDP 时间序列进行了实证分析.

本文采用 H-P 滤波法去除时间序列的线性趋势项. H-P 滤波法是一种时间序列在状态空间中的分析方法, 其理论基础是时间序列的谱分析方法. 谱分析方法认为时间序列是不同频率成分的叠加, 时间序列的 H-P 滤波就是要在所有的不同频率的成分中, 分离出频率较高的成分, 去掉频率较低的成分, 也即去掉长趋势项, 对短期随机波动项进行度量. H-P 滤波的原理可以表述为: 对于经济时间序列为  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , 趋势要素为  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ .  $n$  为样本的容量. 因此, H-P 滤波可以将  $y_t$  分解为:  $y_t = g_t + c_t$ , 其中  $g_t$  和  $c_t$  均为不可观测值. 一般的, 时间序列  $Y$  中不可观测部分趋势  $G$  常被定义为下面最小化问题的解:

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^n (y_t - g_t)^2 + \sum_{t=1}^n [B(L)g_t]^2 \right\}, \quad (29)$$

其中  $B(L)$  为滞后算子多项式. 则 H-P 滤波问题就是使下面的损失函数最小, 即:

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^n (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=1}^n [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2 \right\}. \quad (30)$$

H-P 滤波具有使用方便灵活, 可靠性较高的特点, 为方便比较, 同样选取上证指数和深证指数 2017 年 6 月 1 日至 2018 年 6 月 1 日共 247 个交易日的收盘价价格, 采用 H-P 滤波法对时间序列进行预处理, HP 滤波平滑系数的选择根据 Hodrick 等<sup>[33]</sup> 提出的方法进行了多种尝试, 结合时频分析的需要, 最终选定为 100.

为得到上证指数和深证指数的时频分布图, 利用 H-P 滤波法去除时间序列的线性趋势项, 得到周期项数据. 上证指数和深证指数趋势项和周期项走势见图 2.a 和图 2.b. 由图可知, 上证指数和深证指数基本变动趋势基本相似, 但相对上证指数, 深证指数变动更频繁. 利用 AFD 算法处理去除趋势的周期项数据, 得到指数的瞬时时频分布, 利用瞬时时频分布表征股指在整个时间域上频率的时变特征. 为了便于比较分析, 将瞬时时频分布图与指数走势图整合, 如图 2.a 和图 2.b 所示. 股指瞬时时频分布图的峰值是由许多彩色点组成, 彩色点区域代表了频率的大小, 频率越大股指变动越剧烈, 股指趋势变动的概率越大. 当两个峰值之间的距离变小或相互重叠时或峰值越大, 趋势的震动就越严重, 股指变动的风险越大. 从图 2.a 可知, 上证指数样本期内最大下跌出现在第 176 期, 瞬时时频分布的峰值出现在第 176 期. 在第 176 期附近峰值堆积较多, 峰值变大, 表明短期内股指即将改变运动趋势. 上证指数阶段性最低点出现在第 176 期, 随后止跌反弹至 182 期的 3330 点. 结合图 2.a 和图 2.b, 样本期内, 相对于上证指数, 深证指数的变动更频繁, 较大变动更多. 一定程度上反映了这样一个事实: 成熟大企业的股票运行相对平稳, 中小企业的股票波动较大. 市场数据表明了这一点: 截止 2019 年 1 月 18 日, 上海证券交易所共有上市公司 1456 家, 总流通市值 242917.57 亿元, 平均市盈率 13.03 倍, 上市公司多是成熟型企业, 有相对稳定的产业. 深圳证券交易所共有 2137 家上市公司, 总流通市值 128633.88 亿元, 平均市盈率 20.88 倍, 其中多是中小企业. 从图 2.b 可知, 深证指数样本期内最大下跌出现在第 176 期, 由图 2.b 可知瞬时时频分布的峰值出现在第 176 期. 在第 176 期附近峰值堆积较多, 峰

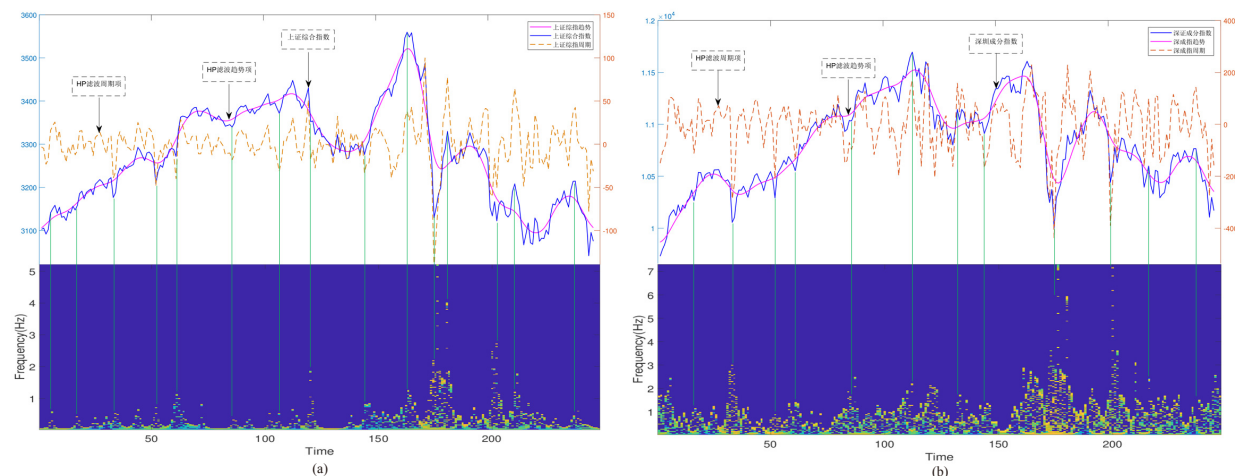


图 2 股票指数走势及趋势变动图



值变大,表明短期内股指即将改变运动趋势.由图 2.b 可知深证指数从第 176 期开始止跌反弹至第 132 期的 11326.27 点.整个样本期内,上证指数和深证指数都有多次的阶段性波动,图 2.a 和图 2.b 以及表 1 和表 2 详细列明了上证指数和深证指数股指变动较大的阶段性波动以及瞬时时频分布指标峰值出现的时间点.由表中数据,结合图 2.a 和图 2.b 可知,瞬时时频分布指标在历次股指的阶段性波动中都比较准确的提示了股指的变动点,为投资者提供了有益参考.

表 1 上证指数阶段性波动统计表					表 2 深证指数阶段性波动统计表				
开始 时间点	终止 时间点	时间 跨度	指数变 动比例	时频分布峰值 出现时间点	开始 时间点	终止 时间点	时间 跨度	指数变 动比例	时频分布峰值 出现时间点
第 7 期	第 12 期	5 期	-1.11	第 11 期	第 27 期	第 33 期	6 期	-4.81	第 33 期
第 32 期	第 33 期	1 期	-1.43	第 33 期	第 50 期	第 52 期	2 期	-2.40	第 52 期
第 44 期	第 52 期	8 期	-2.55	第 52 期	第 80 期	第 83 期	2 期	-1.08	第 82 期
第 113 期	第 137 期	24 期	-5.28	第 130 期	第 92 期	第 96 期	4 期	-1.84	第 95 期
第 164 期	第 176 期	12 期	-12.05	第 176 期	第 113 期	第 117 期	4 期	-3.44	第 116 期
第 192 期	第 204 期	12 期	-6.16	第 200 期	第 119 期	第 131 期	12 期	-6.90	第 130 期
第 212 期	第 216 期	4 期	-4.40	第 214 期	第 164 期	第 176 期	12 期	-13.84	第 176 期
第 238 期	第 245 期	7 期	-5.38	第 240 期	第 192 期	第 201 期	9 期	-7.82	第 200 期
					第 212 期	第 216 期	4 期	-3.82	第 216 期
					第 238 期	第 245 期	7 期	-6.13	第 244 期

从股票的价格关系看,股价与资金流量存在一定的相关性.资金流量达到一定数量时,股价会发生较大变化.为了更好地研究股票的价格关系,将股指的时频分布与交易量的时频分布整合成 3.结合图 3.a 和图 3.b 发现,上证股指趋势震动较大时,交易量数据也震动较大,价量运动趋势基本一致.相对于上证股指,深证股指趋势变动和交易量趋势变动具有较低的一致性,这一定程度上反映了深证证券交易所上市的小市值的中小企业股票更容易受到市场投机的影响.从宏观经济运行上看,股票市场指数是经济的先行指标,具有经济晴雨表的功能.当瞬时时频分布图的频率连续达到峰值时,股指短期内可能会改变运动趋势,投资者可以提前清仓或建仓,宏观经济决策者也可以根据股指的变动未雨绸缪,及时采取相应的货币政策或财政政策.

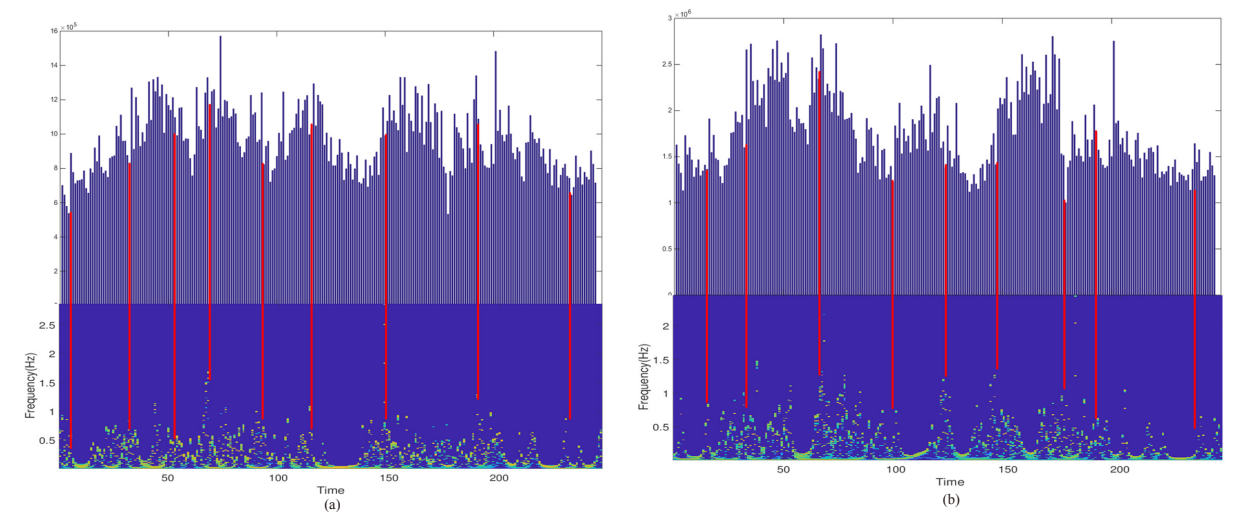


图 3 股票指数交易量时频分布图

股票的市场价格处于不断变化之中,获利机会稍纵即逝,因此投资者更关注证券市场的实时数据.为了更好的把握投资机会,本文利用瞬时时频分布分析了股指的分钟数据,为方便图像的观察分析,本文选取 2018 年 12 月 24 日至 2019 年 1 月 18 日股指分钟数据变动趋势,首先利用 AFD 算法对股指的分钟交易数据进行重建(见图 4),图中蓝色线代表上证原始数据,红色虚线代表 AFD 重建数据.由图 4.c 知,股指的时频分布从第 590 期开始集聚,市场风险也不断积累,瞬时时频分布在第 727 期出现最大峰值,风险集聚也达到最大,此时市场趋势变动的可能性也达到最大.根据图 4.a 上证指数的实时数据可知,上证指数在第 721 期时处于短期的最高点,之后指数下行直至第 980 期开始探底回升,股指的时频分布较好的提示了市场风险,给

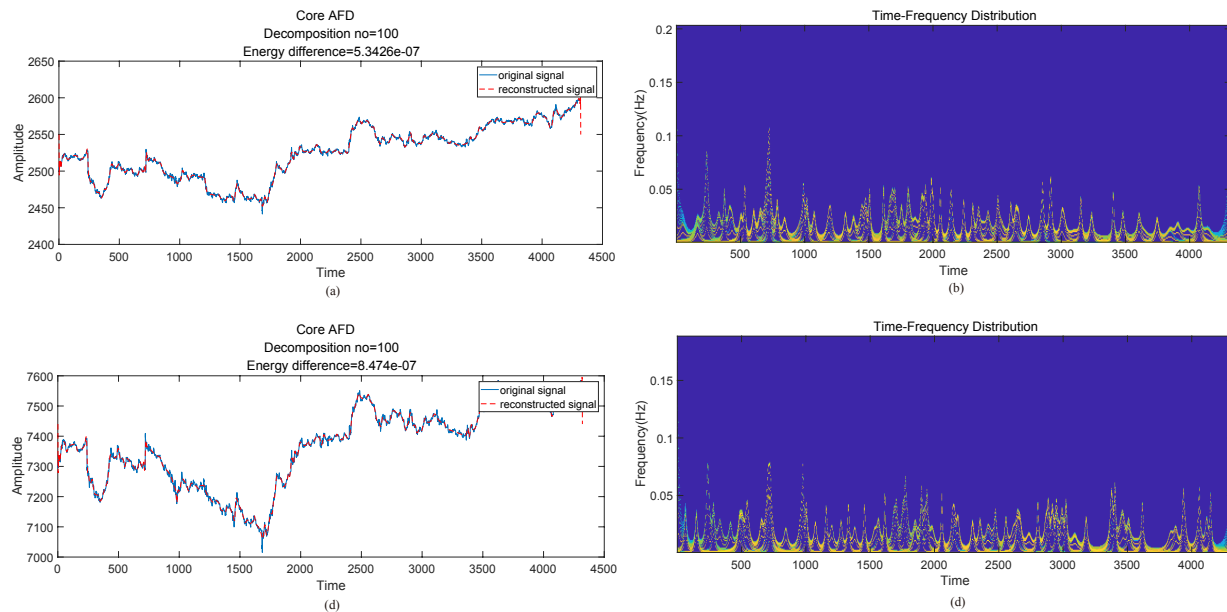


图 4 股票指数 AFD 分解及实时时频分布

出了投资的时点. 根据图 4.b 深证指数的实时数据可知, 深证指数在第 721 期时处于短期的最高点, 之后指数下行直至第 981 期开始探底回升, 股指的时频分布在第 721 期达到峰值, 较好地提示了市场风险, 给出了投资的时点.

结合图 1.c 和图 1.d 可知, 在小波尺度图中, 利用颜色的深浅表征股指的变动, 当最多的彩色点集聚, 颜色逐渐加深时, 频率变的越高, 这意味着股指即将改变运动方向. 但对于样本期内的股指变动, 小波尺度图仅仅提供了少数几次较为明显的指示. 与瞬时时频分布相比, 小波尺度图具有较低的时频集中度, 无法给出股市价格变动趋势更精确的特征. 对投资者来说, 基于自适应傅里叶分解的时频分布图利用股指频率峰值的大小更清晰地表征了股指的变动趋势, 在历次股指的阶段性波动中都比较准确地提示了股指的变动点, 因此基于自适应傅里叶分解的瞬时时频分布图从多方面为投资者提供了有益参考, 是特征更突出、价值更大的指标图.

## 4 结论

本文提出了一种新的分析股票市场变动的时频分布方法. 在金融时间序列数据处理过程中, 模型首先利用 H-P 滤波技术去除趋势项和干扰信息. 其次, 金融时间序列处理主要包括利用自适应傅里叶分解提取时间序列数据特征, 将数据特征用时频分布表现出来, 然后基于信号本身的能量特征进行特征分析, 研判股票市场的变动趋势. 本文金融时间序列数据来自于上海证券交易所的上证综合指数和深圳证券交易所的深证成分指数, 数据选取充分考虑了指标的实用性, 既包括交易的日数据也包括交易的分钟数据.

基于自适应傅里叶分解算法, 通过观察瞬时时频分布图, 投资者可以清晰了解当前股票市场的变化趋势, 预知市场风险, 为下一步的投资决策提供了参考. 与基于小波的股票市场分析指标相比较, 基于 AFD 时频分布的指标的分辨率更高, 能量更密集, 尤其是准确性和可读性更好.

## 参考文献

- [1] Huang N E, Wu M L, Qu W, et al. Applications of Hilbert-Huang transform to non-stationary financial time series analysis[J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2010, 19(3): 245-268.
- [2] Qian T, Wang Y. Remarks on adaptive Fourier decomposition[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2013, 11(1): 1350007.
- [3] Dang P, Qian T, Guo Y Y. Transient time-frequency distribution based on mono-component decomposition[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2013, 11(3): 1350022.
- [4] Qian T, Wang Y B. Adaptive Fourier series — A variation of greedy algorithm[J]. Advances in Computational Mathematics, 2011, 34(3): 279-293.

- [5] Berdiev A N, Chang C P. Business cycle synchronization in Asia-Pacific: New evidence from wavelet analysis[J]. *Journal of Asian Economics*, 2015, 37: 20–33.
- [6] In F, Kim S. The hedge ratio and the empirical relationship between the stock and futures markets: A new approach using Wavelet analysis[J]. *Journal of Business*, 2006, 79(2): 799–820.
- [7] Li S T, Kuo S C. Knowledge discovery in financial investment for forecasting and trading strategy through wavelet-based SOM networks[J]. *Expert Systems with Applications*, 2008, 34(2): 935–951.
- [8] Gallegati M. Wavelet analysis of stock returns and aggregate economic activity[J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2008, 52(6): 3061–3074.
- [9] Addo P M, Billio M, Guegan D. Nonlinear dynamics and wavelets for business cycle analysis[J]. *Documents de Travail du Centre d'Economie de la Sorbonne*, 2014, 20: 73–100.
- [10] Huang S C, Wu T K. Integrating recurrent SOM with wavelet-based kernel partial least square regressions for financial forecasting[J]. *Expert Systems with Applications*, 2010, 37(8): 5698–5705.
- [11] Jammazi R. Oil shock transmission to stock market returns: Wavelet-multivariate Markov switching GARCH approach[J]. *Energy*, 2012, 37(1): 430–454.
- [12] Guhathakurta K, Mukherjee I, Chowdhury A R. Empirical mode decomposition analysis of two different financial time series and their comparison[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 37(4): 1214–1227.
- [13] Premanode B, Toumazou C. Improving prediction of exchange rates using differential EMD[J]. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(1): 377–384.
- [14] 谢启伟, 轩波, 李建平, 等. 经验模式分解算法的分析及应用 [J]. *系统工程理论与实践*, 2009, 29(11): 168–176.  
Xie Q W, Xuan B, Li J P, et al. Analysis and application of empirical mode decomposition algorithm[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2009, 29(11): 168–176.
- [15] Xie Q, Xuan B, Peng S, et al. Bandwidth empirical mode decomposition and its application[J]. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 2008, 6(6): 777–798.
- [16] 李合龙, 冯春娥. 基于 EEMD 的投资者情绪与股指波动的关系研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(10): 2495–2503.  
Li H L, Feng C E. Relationship between investor sentiment and stock indices fluctuation based on EEMD[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2014, 34(10): 2495–2503.
- [17] 阮连法, 包洪洁. 基于经验模态分解的房价周期波动实证分析 [J]. *中国管理科学*, 2012, 20(3): 41–46.  
Ruan L F, Bao H J. An empirical analysis on periodic fluctuations of real estate price based on EMD[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2012, 20(3): 41–46.
- [18] 王璇, 采俊玲, 汤铃, 等. 基于 BEMD-Copula-GARCH 模型的股票投资组合 VaR 风险度量研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2017, 37(2): 303–310.  
Wang X, Cai J L, Tang L, et al. VaR measurement for stock portfolio based on BEMD-Copula-GARCH model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2017, 37(2): 303–310.
- [19] 吴登生, 李建平, 汤铃, 等. 生猪价格波动特征及影响事件的混合分析模型与实证 [J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(11): 2033–2042.  
Wu D S, Li J P, Tang L, et al. A hybrid analysis model for fluctuation characteristics and influence events of live pig price and an empirical study[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2011, 31(11): 2033–2042.
- [20] 李合龙, 杨能, 林楚汉, 等. 我国股票市场行业间波动溢出效应研究 —— 基于改进的 EMD 去噪方法 [J]. *系统工程理论与实践*, 2019, 39(9): 2179–2188.  
Li H L, Yang N, Lin C H, et al. A survey on the industrial spillover effect of China's stock market — Based on revised EMD denoising method[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2019, 39(9): 2179–2188.
- [21] 熊正德, 文慧, 凌语蓉. 基于时频分析的农产品期货市场与外汇市场联动关系研究 [J]. *中国管理科学*, 2013(s1): 255–263.  
Xiong Z D, Wen H, Ling Y R. Research on co-movement between agricultural futures markets and foreign exchange market by time-frequency analysis[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2013(s1): 255–263.
- [22] 武华华, 匡海波, 孟斌, 等. 基于 EMD-WA 模型的 BDI 指数波动周期特征研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2018, 38(6): 1586–1598.  
Wu H H, Kuang H B, Meng B, et al. Study on the periodic characteristics of BDI index based on EMD-WA model[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2018, 38(6): 1586–1598.
- [23] Korotayev A V, Tsirel S V. A spectral analysis of world GDP dynamics: Kondratieff waves, Kuznets swings, Juglar and Kitchin cycles in global economic development, and the 2008–2009 economic crisis[J]. *Structure and Dynamics: eJournal of Anthropological and Related Sciences*, 2010, 4(1): 1–55.
- [24] Zhang L, Liu N, Yu P. A novel instantaneous frequency algorithm and its application in stock index movement prediction[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2012, 6(4): 311–318.
- [25] Caetano M A L, Yoneyama T. Characterizing abrupt changes in the stock prices using a wavelet decomposition method[J]. *Physica A*, 2007, 383(2): 519–526.
- [26] Qian T. Intrinsic mono-component decomposition of functions: An advance of Fourier theory[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2010, 33(7): 880–891.

- 
- [27] Qian T, Wang Y B, Dang P. Adaptive decomposition into mono-components[J]. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 2009, 1(4): 703–709.
  - [28] Qian T, Tan L H, Wang Y B. Adaptive decomposition by weighted inner functions: A generalization of Fourier series[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2011, 17(2): 175–190.
  - [29] Ravn M O, Uhlig H. On adjusting the Hodrick-Prescott filter for the frequency of observations[J]. *The Review of Economics and Statistics*, 2002, 84(2): 371–375.
  - [30] Kim S, Koh K, Boyd S, et al.  $l_1$  trend filtering[J]. *SIAM Review*, 2009, 51(2): 339–360.
  - [31] Zhu X M, Luan W X, Zhu, et al. Analysis of macroeconomic time series by the HP filter[C]// *International Conference on E-business and E-government*, IEEE, 2011.
  - [32] Guerrero V M. Estimating trends with percentage of smoothness chosen by the user[J]. *International Statistical Review*, 2008, 76(2): 187–202.
  - [33] Hodrick R J, Prescott E C. Post-War U.S. business cycles: An empirical investigation[J]. *Social Science Electronic Publishing*, 1997, 29(1): 1–16.